5. Как определяется показатель Ляпунова и что он характеризует?

Динамическая система – любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния, как совокупности некоторых величин в некоторый момент времени, и задан закон, описывающий эволюцию начального состояния с течением времени.

Математическая модель динамической системы: введены параметры (координаты), характеризующие в каком-то приближении состояние системы, и указан оператор φ_t, позволяющий установить изменение координат во времени.

Аттрактор – притягивающее предельное множество.

Странный аттрактор – сложные притягивающие множества в фазовом пространстве рамерности $N > 2$, допускающие возможность хаотического поведения динамических систем.

Экспоненциальное разбегание фазовых траекторий

Рассмотрим две фазовые точки, расстояние между которыми $\Delta(0)$ в начальный момент времени мало. В момент времени t оно равно $\Delta(t)$, причем $\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \sim e^{ht}$, где h – некоторое число, характеризующее скорость разбегания траекторий.

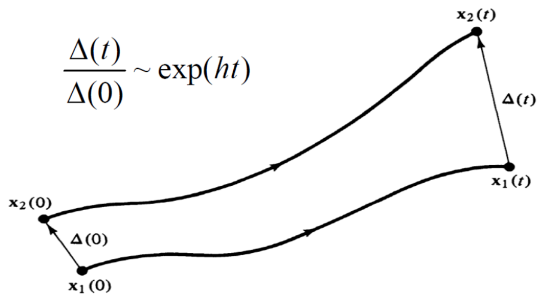

Рис. 1. Фазовые траектории.

В ограниченном фазовом объеме экспоненциальное разбегание приводит к «запутыванию траекторий».

Показатель Ляпунова

Количественной мерой, характеризующей странный аттракторы, является число Ляпунова (характеристика экспоненциального разбегания)

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}.$$

Например, в трехмерном пространстве существует 4 типа аттракторов, которые определяются показателем Ляпунова $\lambda = (\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3)$:

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, -)$ – устойчивая неподвижная точка;
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$ – устойчивый предельный цикл;
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ – устойчивый двумерный тор;
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$ – странный аттрактор.